

Unidad 1: El razonamiento natural y simbólico

Características de los lenguajes naturales y de los lenguajes artificiales. Funciones y tipos de lenguaje natural. Términos y oraciones. Tipos de términos. Definiciones. Tipos de definición. Definiciones implícitas y explícitas. Correlación entre lenguajes formales e informales. El problema de la verdad.

Resumen de las principales ideas de esta unidad

Diferencias entre los lenguajes naturales y los artificiales:

Lenguajes naturales	Lenguajes artificiales
Condicionados históricamente	No condicionados históricamente
No poseen una gramática explícita	Sí poseen gramática explícita (estructura especificable)
Multipropósito	Creados con un fin determinado
Vagos	Precisos
Ambiguos	Unívocos
Poseen textura abierta	Sin textura abierta (rígidos)

Los lenguajes naturales nos sirven para diversos propósitos:

Informar: hacemos que otras personas conozcan lo que ocurrió. Utilizamos **la función informativa** del lenguaje en relatos y descripciones. Lo que decimos informativamente suele ser verdadero o falso. En algunas ocasiones esto último no importa. Para desempeñar esta función utilizamos oraciones declarativas, pero no siempre. Ejemplo: “la vaca nos da la leche”.

Dar órdenes: requerimos que otras personas modifiquen su conducta. Las expresiones lingüísticas, en su **función directiva**, no son ni verdaderas ni falsas.

Una orden se cumple o no se cumple. Para impartir órdenes solemos utilizar oraciones imperativas, pero también pueden utilizarse otro tipo de expresiones. Ejemplo: “traeme el martillo”.

Expresar sentimientos: a veces decimos cosas que no pretenden informar algo a alguien ni dar una orden, sino que expresan un estado interno (alegría, tristeza, enojo, etc.). Esta es la **función expresiva** del lenguaje. Ejemplo: “¡caramba!”

Cometer otras acciones: con el lenguaje natural también se llevan a cabo otras acciones. Estas acciones sólo pueden realizarse por medio del lenguaje. Ejemplos: agradecer, bautizar, casar, saludar, etc.. La llamamos **función ejecutiva o performativa** del lenguaje.

Para nuestros fines nos importa la función informativa del lenguaje. Especialmente nos interesa distinguir el **contenido informativo** de las oraciones que utilizamos de su **contenido emotivo**. Por ejemplo, las siguientes oraciones tienen **el mismo contenido informativo** pero **distinto contenido emotivo**:

- a) Las mieses son de oro, de esmeralda los prados, y ese manso arroyuelo trae su caudal de plata.
- b) Los cereales maduros son amarillos, el pasto del campo es verde y el pequeño arroyo refleja los rayos del sol.

En teoría de la deducción no nos debe importar el contenido emotivo.

Los términos se refieren a objetos o conjuntos de objetos. Funcionan como nombres. Las oraciones, en cambio, expresan hechos y relaciones entre hechos. Ejemplos:

Términos	Oraciones
2^3	$2^3 = 8$
El sol	La tierra gira alrededor del sol
El departamento en el que vivía John Travolta	Vi el departamento en el que vivía John Travolta

Mamífero	La vaca es un mamífero
tío	Juan es tío de Pedro

Sólo las oraciones (bajo ciertas condiciones) pueden ser verdaderas o falsas. Los términos no pueden ser ni verdaderos ni falsos. De los términos decimos que poseen (o no) referencia.

Cuando el término se refiere a un único objeto, decimos que es un término individual. Cuando se refiere a más de un objeto será un término de clase. Y si se refiere a pares (ternas, etc.), decimos que son términos de relación. Ejemplos:

Tipos de términos	Ejemplos
Individuales	Napoleón Bonaparte, el sol, $8 + 5$, el director de Polka producciones
De clase	perro, argentino, ingeniero, cultura, barco, andamio, martillo
De relación	primo, madre, =, preceder, Σ , ser causa de, estar incluido en

Los términos que poseen referencia se llaman términos **denotativos**. Los que no la poseen se llaman términos no denotativos. En los ejemplos anteriores todos los términos son denotativos. Ejemplo de términos no denotativos: Batman, el ciego que ve.

Informalmente, los términos denotativos tienen una extensión. **La extensión de un término** es el conjunto de objetos a los que se aplica dicho término. Ejemplos: la extensión del término “Napoleón” es el conjunto unitario cuyo único elemento es el hombre llamado Napoleón; la extensión del término “vaca” es el conjunto de todas las vacas. **Tener presente** que los términos pertenecen al lenguaje, mientras que las extensiones de los términos, generalmente, no pertenecen al lenguaje. El término “vaca” está compuesto por cuatro letras y el objeto al cual se aplica el término muge. Pero el término “vaca” no muge, ni las vacas tienen cuatro letras.

Las definiciones nos dan el significado de las palabras, ya sea el significado que socialmente se les atribuye por medio del uso (como en las definiciones léxicas), o el que nosotros queremos darle (como en las estipulativas). También hay otros tipos de definición.

Tipos de definición	Explicación	Ejemplos
Estipulativas	Implican la decisión de dar significado a una palabra	<p>“Fe” es el símbolo químico del hierro.</p> <p>“Gogool” es la potencia centésima de diez. (Kasmer)</p>
Lexicográficas o léxicas	Informan del significado que ya tiene, socialmente, una palabra	<p>Corcho: parte exterior de la corteza del alcornoque.</p> <p>Piltrafa: carne flaca que no es más que casi pellejo.</p>
Teóricas	Buscan caracterizar teóricamente el objeto al que se aplica la palabra.	<p>Decir “Lógica” es lo mismo que decir “arte y método de pensar correctamente”. (Durant, W.: <i>Historia de la filosofía</i>, p. 95)</p> <p>Lógica: disciplina que investiga la relación de consecuencia que se da entre las premisas y la conclusión de un argumento correcto. (Mates, B.: <i>Lógica matemática elemental</i>, p. 16)</p>
Enumerativas	Se enumeran los objetos nombrados por el definiendum	A = {a, b, c}
Ostensivas	Mostrar lo que el definiendum nombra	
Por género próximo y diferencia específica	Destacan una propiedad peculiar de los individuos de una cierta clase o conjunto	<p>Padre: progenitor masculino.</p> <p>Soltera: mujer no casada.</p>
Persuasivas	procuran influir en las actividades del oyente	Abortar: parir antes de tiempo.

		Abortar: asesinar a seres humanos indefe
--	--	--

Todas estas definiciones son **explícitas**, pues de una u otra manera mostramos su significado a través de otros términos (salvo en las ostensivas).

Podríamos definir una relación **R** cualquiera de la siguiente manera: Si **x** tiene la propiedad **P**, entonces existe un único **y** $\neq x$ tal que **y** también tiene la propiedad **P** y está en la relación **R** con **x**. Cuando sólo ofrecemos la **estructura** en la que se encuentra **R** estamos dando una **definición implícita** de **R**.

Para construir lenguajes formales podemos partir de un conjunto de símbolos al que llamaremos **vocabulario**. Con los elementos del vocabulario generamos una **sintaxis** por medio de reglas de formación de expresiones. Por ejemplo, para una lógica proposicional de primer orden establecemos el siguiente vocabulario:

$$V = \{p, q, r, s, t, \dots, z, p_1, p_2, \dots, \mid, (,)\}$$

y las siguientes reglas:

1. Una letra minúscula de la p a la z con o sin subíndice es una fbf.
2. Si A y B son fbfs, entonces $(A \mid B)$ también es una fbf. [Incompatibilidad: sólo es falsa cuando ambos son verdaderos].
3. Definiciones: si A y B son fbf, entonces (convenimos en no utilizar los paréntesis externos)

$$\neg A =_{\text{def}} A \mid A$$

$$A \wedge B =_{\text{def}} \neg(A \mid B)$$

$$A \rightarrow B =_{\text{def}} \neg(A \wedge \neg B)$$

$$A \vee B =_{\text{def}} \neg A \rightarrow B$$

$$A \leftrightarrow B =_{\text{def}} (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$$

4. Sólo son fbfs las construídas a partir de las reglas 1 y 2, o por medio de las definiciones de 3.

Con esto ya tenemos un lenguaje formal. Dada cualquier sucesión de elementos del vocabulario estamos en condiciones de decidir si esa sucesión pertenece o no al lenguaje. Ejemplo: $\neg p \vee q$ es una fbf porque p es una fbf por regla 1, $\neg p$ también lo es por definición. q es una fbf por regla 1. Siendo $\neg p$ y q ambas fbf, $\neg p \vee q$ también es una fbf por definición.

Otro ejemplo: $\forall \forall \wedge p p$ es una sucesión de símbolos del vocabulario pero no pertenece al lenguaje porque los tres primeros símbolos requieren una fbf tanto a izquierda como a derecha.

¿Dos tipos de razonamiento?

G Deductivos y no deductivos

En los razonamientos deductivos

G la conclusión se deriva de las premisas con absoluta necesidad

G es imposible que las premisas sean verdaderas y la conclusión sea falsa

G la conclusión no contiene más información que la ya contenida en las premisas

G la conclusión no se ve afectada por la aparición de nueva información

En los no deductivos

G la conclusión se deriva de las premisas sólo con alguna probabilidad

G es posible que las premisas sean verdaderas y la conclusión sea falsa

G la conclusión incluye información no contenida previamente en las premisas

G puede aparecer información que afecte la fuerza de la conclusión

Los razonamientos deductivos pueden considerarse no deductivos en los que la probabilidad de la conclusión es 1.

Tres formas de evaluar corrección o validez

- G Valoración lógica: ¿se sigue la conclusión lógicamente de las premisas?. ¿Es válido el razonamiento?
- G Valoración material: ¿son verdaderas (o falsas) las premisas y la conclusión?
- G Valoración retórica: ¿es persuasivo o convincente el razonamiento?

Razonamientos formales e informales

- G En los razonamientos formales sólo recurrimos a la sintaxis y a la semántica formal para evaluar su validez o corrección.
- G En los informales sólo podemos recurrir a la intuición o a la semántica y pragmática informales para evaluar validez.

Ejercicios

1. Clasifique las siguientes expresiones como pertenecientes a un lenguaje informativo, directivo, operativo o expresivo según corresponda.

- a) Está despedido.
- b) Váyase.
- c) ¿Tiene hora?
- d) La torre de los ingleses está en Buenos Aires.

- e) Este hombre ya está en el cargo. (dicho por el gerente de la empresa refiriéndose a un candidato)
- f) Por un punto exterior a una recta sólo pasa una paralela a dicha recta.
- g) Matar a los delfines es malo.
- h) Mi vida es un paralelogramo.
- i) ¡Recórcholis!
- j) Cuidate, que si no, sos boleta.

2. Distinga la carga emotiva presente en los siguientes párrafos. Si está en lenguaje neutro, reescríbalo emotivamente. Si tiene carga emotiva, tradúzcalo a un lenguaje neutro.

a) Organófilos: variedad poco importante de infecundos, reconócense en seguida por una especie de culto fetichista hacia los instrumentos de observación. Fascinados por el brillo del metal como la alondra por el espejuelo, cuidan amorosamente de sus ídolos, que guardan como en sagrario, relucientes como espejos y admirablemente representados. Reposo y disciplina conventual reinan en el laboratorio, donde no hay una mancha ni se oye el menor rumor. [Santiago Ramón y Cajal, *Los tónicos de la voluntad*, Madrid, Espasa-Calpe, sexta edición, 1952, p. 93]

b) ... por complicadas que sean, está claro que las máquinas no son fines en sí mismos. Pueden ser valiosas por su utilidad o por su escasez; incluso determinado ejemplar puede ser valioso por ser históricamente único. Sin embargo, las máquinas se tornan en algo sin valor si no poseen un valor de escasez, pues si hay muchas del mismo tipo estamos dispuestos a pagar para que se las lleven. Por el contrario, valoramos las vidas humanas a pesar del problema de la superpoblación, el más grave de los problemas sociales de nuestro tiempo. Incluso respetamos la vida de un asesino.

3. Imagine situaciones en las que puedan considerarse vagas las siguientes palabras:

guerra - homicidio - ciencia - casa - enfermedad - productor agropecuario - político - masa - color - comida

4. El profesor Ernesto Sosa tiene un problema que acarrea desde hace varios años. Cree firmemente las siguientes dos afirmaciones:

a) Si en un lugar L no existe en el momento T_i otra arena que la de una cierta duna de arena, y si en el intervalo que va de T_i a T_{i+1} se quita un grano de arena de L y no se realiza ningún otro cambio en la cantidad o en la disposición de la arena en L, entonces (necesariamente) en T_{i+1} hay todavía una duna de arena en L.

b) Si en un lugar L no hay nada más que un grano de arena, entonces (necesariamente) en ese lugar no hay una duna de arena.

El problema consiste en que también cree, con idéntica firmeza, que estas dos afirmaciones son incompatibles. Se agradece un diagnóstico. [Sosa menciona este problema en «Más allá del escepticismo, a nuestro leal saber y entender», *Análisis Filosófico*, VIII, 2, 1988:97-139. El ejemplo está en la pág. 109.]

5. Elija uno de los siguientes párrafos y a) detecte palabras o expresiones vagas y/o ambiguas, b) justifique su respuesta mostrando en cada caso el perjuicio causado a la claridad expresiva, c) redacte nuevamente el párrafo tratando de precisarlo todo lo que pueda, y d) señale los errores conceptuales que encuentre.

l) “El que aspira a ser un sabio, un gran “mago”, debe ser heredero de la esfinge: tener cabeza humana para poseer la palabra, alas de águila para elevarse, nalgas de toro para labrar las profundidades y garras de león para abrirse camino hacia arriba y hacia abajo, hacia la derecha y hacia la izquierda.” Noemí Hebe Martínez, *El universo y sus enigmas*, “Superstición vs. magia”, Corregidor, 1987, p. 59.

II) “La Semiótica es el estudio de los signos, es decir del sentido de las palabras. Estos son arbitrarios, mientras que los símbolos contienen un valor impuesto por el hombre. Son pescados sueltos con dos pescadores; pero si se los presenta cruzados son el símbolo de las multiplicaciones de los panes, que también fue de los peces. Es más, cuando estamos durmiendo y soñamos, nos comunicamos con nuestra mente subjetiva o el inconsciente, cuyo lenguaje es simbólico. Por eso muchas veces no alcanzamos a descifrar el mensaje, porque viene en una forma muy desordenada la representación de sentimientos o sensaciones o recuerdos de ese fantástico mundo que permanece para muchos de nosotros inasible.” Sylvia Colombres, *El poder mental. Los símbolos secretos*, Corregidor, 1993, p. 21.

6. John Tillotson, obispo de Canterbury entre 1690 y 1700, en defensa de la creación divina del mundo, escribió:

¿Cuántas veces tendrá un hombre, habiendo mezclado en una bolsa una colección de letras, que arrojarlas al suelo para que formen al caer un poema exacto, o bien hasta formar un buen discurso en prosa? ¿Y no será más fácilmente creado por azar un librito que escrito el inmenso volumen que es el mundo?”,

y Sir Arthur Eddington, en 1927, decía:

“si pudiéramos a un ejército de monos a aporrear máquinas de escribir, podrían llegar a escribir todos los libros del Museo Británico”.

[Citado en Brian Hayes, “Juegos de Ordenador. Reseña de actualidad sobre el noble arte de transformar literatura en parloteo”, *Investigación y Ciencia*, 88, enero de 1984, pág. 102]

Relacione la hipótesis Tillotson-Eddington (la que dice que es posible escribir algo con sentido al azar) con las nociones de significado oracional, vaguedad, ambigüedad y textura abierta. [Ayuda: averiguar qué relación existe entre la mera combinatoria de letras y las nociones mencionadas. Ver si es factible o no que suceda lo sugerido.]

7. Cada una de las siguientes oraciones expresan más de una proposición. Explicítelas claramente.

- a) La ley establece sanciones para los que conduzcan automóviles alcoholizados.
- b) Conviene que no te pases en el tiempo que dispones para estar junto con mi hermana.
- c) Doce policías fueron detenidos por maleantes.
- d) Aquí tenemos una nota alta.
- e) Apenas se entreplumaban, algo como un ulucordio los encrestoriaba, los extrayuxtaba y paramovía.

8. Indique a qué clase o clases pertenece cada una de las siguientes definiciones. Señalar, además, si están dadas en lenguaje objeto, metalenguaje o lenguaje mixto. Ejemplos:

- a) “Matrimonio” significa “prostitución legalizada”.
- b) Llamamos “basion” al punto medio en el borde anterior o ventral del foramen magnum.
- c) Utilizaremos la expresión “mausoleo” como nombre que suele darse a un monumento funeral suntuoso.
- d) Los trogloditas son los habitantes de las cavernas.
- e) Una emulsión es un coloide en el que un líquido está suspendido en otro líquido.
- f) “Lipasa” es el nombre que recibe una enzima que degrada los lípidos.
- g) Decir “delgado” es lo mismo que decir “enjuto de carnes”.
- h) “Comunismo” se entiende como “doctrina que enseña las condiciones para la emancipación del proletariado”.

- i) “Comunismo” es el nombre de cualquier régimen totalitario caracterizado por el ambiente militarizado y la supresión de los derechos individuales.
- j) Las expresiones “egoísmo” y “amor exagerado de sí mismo” son equivalentes en significado.
- k) Definimos “conocimiento” como “creencia verdadera y justificada”.
- l) El conocimiento consiste en la abstracción de la forma esencial a partir de la materia individual.
- m) A la copia del objeto en el sujeto llamamos “conocimiento”.
- n) “Conocimiento” significa “captación y determinación de objetos por medio de conceptos”.
- o) Una función es recursiva si existe un procedimiento efectivo para calcularla.

9. Indique qué regla o reglas violan las siguientes definiciones. Señalar, además, si están dadas en lenguaje objeto, metalenguaje o lenguaje mixto.

- a) Un pesado es una persona que habla cuando uno quiere que escuche.
(Ambrose Bierce)
- b) “Libro” es la palabra que usamos para designar aquello que está hecho de papel, cubiertas y letras de imprenta.
- c) “Pasto” se refiere a lo que comen las vacas.
- d) “Fatalista” significa “partidario del fatalismo”.
- e) “Voluntad popular” y “voluntad del pueblo” significan lo mismo.
- f) Usamos la expresión “opinión pública” como equivalente de “juicio o parecer del público”.
- g) Decir “pantalón” y decir “vestimenta de tela que se usa para cubrir las piernas” es equivalente.

- h) Llamamos “lámpara” a cualquier objeto que ilumine.
- i) La palabra “ideal” denota algo así como un huracán que lleva la vida hacia las cimas y la pone al servicio de Dios y de los demás con ilusión.
- j) Definir es precisar el alcance y significado de un signo lingüístico en determinado contexto teórico.
- k) “Jirafa” y “mamífero rumiante del Africa” son expresiones sinónimas.
- l) Definimos a la raza blanca como aquella que no es negra, amarilla, ni cobriza.
- m) El hombre es un junco pensante. (Pascal)
- n) “Geometría” es igual por definición a “ciencia que estudia los entes geométricos”.
- o) Si así fué, así pudo ser; si así fuera, así podría ser; pero como no es, no es. Eso es la Lógica. (Tweedledee, en *Through the Looking Glass*, cap. IV)

10. ¿Son estas diferentes clases de X o diferentes sentidos de la palabra “X”?

- a) Tabla de lavar, tabla de logaritmos.
- b) Perro pastor, perro de caza.
- c) Comerse un sandwich, comerse una palabra.
- d) Cumbre de la montaña, cumbre de la gloria.
- e) Vela de barco, vela para alumbrar.
- f) Pie de un árbol, pie de una persona.
- g) Desierto helado, desierto de arena.
- h) Muñeca de la mano y muñeca, el juguete
- i) Saco de papas y saco de vestir.

11. Indique con V o F si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, respectivamente.

- a) Cervantes escribió “El Quijote”. []
- b) El manco de Lepanto escribió “El Quijote”. []
- c) El manco de Lepanto es el nombre del autor de “El Quijote”. []
- d) Cervantes es el nombre que le damos al manco de Lepanto. []
- e) Cervantes era un hombre valiente. []
- f) “Cervantes” comienza con “C”. []
- g) “El manco de Lepanto” es el nombre con el que recordamos al autor del Quijote. []
- h) Cervantes es un nombre más breve que el manco de Lepanto. []
- i) El autor del Quijote y el manco de Lepanto significan lo mismo. []

12. Distinga en los siguientes fragmentos: a) expresiones que no son oraciones, b) oraciones que no expresan proposiciones (o, dicho de otra manera, que no forman un enunciado), c) oraciones que sí expresan proposiciones, d) oraciones que expresen más de una proposición, y e) pares de oraciones que expresen la misma proposición.

1. Retl mambol seleuh alkuli.
2. Los pirotos carulizan eláticamente gufias ingrólicas.
3. París el duele que y si.
4. El bachibuzuk cazcalea ronzando binzas.
5. Las vacas ponen huevos.
6. La guitarra tiene seis cuerdas.
7. Oigo los cascos de la caliente muerte que me busca.

8. La raíz cuadrada de -1 murió ayer.
9. Ayer oí un sabor.
10. Juan bebió un cigarrillo.
11. El círculo cuadrado es triangular.
12. Cuando tengo sed tomo agua deshidratada.
13. ¿Tiene hora?
14. Cierre la puerta, por favor.
15. María ama a Juan.
16. Juan es amado por María.
17. The cat is on the mat.
18. El gato está sobre el felpudo.
19. $x > y$
20. $y < x$
21. < 4
22. > 3
23. María es más linda que Leticia.
24. Leticia es más fea que María.
25. Me gusta el flan.
26. No me disgusta el flan.

13. En una hipotética isla sólo existen dos clases de habitantes: los caballeros, que siempre y sin excepción dicen la verdad, y los escuderos, que mienten sistemáticamente. Sabiendo esto, trate de resolver los problemas propuestos razonadamente. El primero está resuelto a modo de ejemplo. Estos ejercicios han sido tomados del libro de Raymond Smullyan *¿Cómo se llama este libro?*, Madrid, Cátedra, 1989.

1) A y B son habitantes. A dice «Uno al menos de nosotros es escudero». ¿Qué son A y B?

Rta.: Hipótesis: A es escudero. Si A es escudero, entonces es falso que al menos uno de ellos sea escudero. Por lo tanto, ninguno de los dos puede ser escudero. Esto se contradice con la hipótesis, por lo tanto A debe ser caballero. Si A es caballero, lo que dijo es verdad, y, al no ser él escudero, necesariamente ha de serlo B. La única hipótesis consistente con los datos es, pues, que A es caballero y B es escudero.

2) A, B y C son habitantes. Un viajero pregunta a A, «¿Eres caballero o escudero?». No se entiende lo que A contesta. Se le pregunta a B «¿Qué ha dicho A?» y B contesta «A ha dicho que es escudero». C dice «No creas a B que está mintiendo». ¿Qué son B y C?

3) A, B y C son habitantes. El viajero pregunta a A, «¿Cuántos caballeros hay entre ustedes?». No se entiende su respuesta. Se le pregunta a B «¿Qué ha dicho A?». B contesta «A ha dicho que hay un (solo) caballero entre nosotros». C dice «No creas a B que está mintiendo». ¿Qué son B y C?

4) A y B son habitantes. A dice «O yo soy un escudero o B es un caballero». ¿Qué son A y B?

5) A es un habitante y dice «O yo soy un escudero o en caso contrario dos más dos es igual a cinco». ¿Qué se puede concluir?

6) A, B y C son habitantes. A dice «Todos nosotros somos escuderos». B dice «Uno de nosotros, y sólo uno es un caballero». ¿Qué son A, B y C?

7) A, B y C son habitantes. A dice «Todos nosotros somos escuderos». B dice «Uno de nosotros, y sólo uno es un escudero». ¿Puede determinarse lo que es B? ¿Puede determinarse lo que es C?

8) A y B son habitantes. A dice «Yo soy escudero, pero B no lo es». ¿Qué son A y B?

9) A, B y C son habitantes. Dos personas son del mismo tipo si son ambos caballeros o ambos escuderos. A dice «B es un escudero». B dice «A y C son del mismo tipo». ¿Qué es C?

10) Frente a dos habitantes se pregunta a uno de ellos «¿Es alguno de ustedes un caballero?». El interrogado responde y con lo que contesta se tiene la solución del problema. ¿Qué es cada uno de ellos?

14. Distinga cuáles de los siguientes textos constituyen razonamientos. Identifique premisas y conclusión y reconstrúyalo claramente.

- a) Ningún cuadrúpedo sabe silbar. Algunos gatos son cuadrúpedos. Por lo tanto, algunos gatos no saben silbar.
- b) Los niños son ilógicos. Nadie que sepa manejar un cocodrilo es despreciado. Las personas ilógicas son despreciadas. Por consiguiente, los niños no saben manejar cocodrilos.
- c) En el fondo creo que no herí al hombre. La ley de probabilidades me declara inocente de su sangre, pues en todas mis escasas experiencias con armas, nunca di en ningún blanco que tratara de acertar, y yo sé que hice todo lo posible para acertar al hombre. (Mark Twain, *Libro de Notas*)

- d) Meliso sostiene que si algo existe debe ser eterno sobre la base de que es imposible para cualquier cosa venir a la existencia de la nada. (Aristóteles, *De Melisso*, 974a)
- e) Las cabras de Cefalonia no beben del mismo modo que los hacen otros cuadrúpedos, sino que cada día vuelven sus caras hacia el mar, abren sus bocas e inhalan el aire. (Aristóteles, *De miriabilibus auscultationibus*, 831a19,9)
- f) Un alcalde se retrasó cuando se dirigía a inaugurar las fiestas del pueblo, y se le pidió al párroco que hablara mientras tanto a la multitud. Este describió algunos aspectos de su experiencia pastoral, incluyendo su desconcierto y embarazo cuando, muchos años antes, su primer penitente se había confesado de un crimen particularmente sórdido. Finalmente, llegó el alcalde, y, al dar las gracias al párroco por distraer al público durante su ausencia, dijo: "estoy contento de ver aquí hoy al Padre Brown. El y yo somos viejos amigos. En realidad, yo fui su primer penitente. [Este cuento del párroco y del alcalde aparece mencionado en Morris Cohen, *Razón y Naturaleza. Ensayo sobre el significado del método científico*, Buenos Aires, Paidós, 1956, p. 203. La presente versión se extrajo de Margaret Boden, *Inteligencia Artificial y hombre natural*, Madrid, Tecnos, 1984, p. 345.]
- g) James Young Simpson (1811-1870) fue el primer médico que usó la anestesia en partos. Su método fue criticado por los que creían que este dolor estaba decretado por Dios, pues era parte de la maldición que hizo caer sobre Eva. Simpson señaló que Dios no se regocijaba en el dolor, ya que cuando sacó una costilla de Adán para crear a Eva a partir de ella, hizo que se sumiera en un sueño profundo.
- h) En Creta se alza un templo dedicado a la diosa Artemis Rocea. Allí los perros se vuelven locos de rabia y, cuando esa enfermedad los ataca, se tiran de cabeza al mar desde lo alto del acantilado. (Claudio Eliano, *Historia de los animales*, Libro XII, 22)
- i) Tú no conoces a esta persona que está cubierta con un velo. Pero esta persona es tu padre. Luego, tú no conoces a tu padre. (Eubúlides de Mileto)

- j) Tú tienes lo que no has perdido. Pero tú no has perdido los cuernos. Luego, tú tienes cuernos.
- k) Cuando el fisonomista Zopiro encontró a Sócrates, viendo su rostro, lo declaró imbécil de nacimiento, inculto e incapaz de perfeccionarse.
- l) Si Borges nació en Buenos Aires, entonces nació en Argentina. Borges nació en Buenos Aires. Por lo tanto, nació en la Argentina.
- m) La predicción del tiempo es una ciencia exacta. Por lo tanto, mañana lloverá o no lloverá.
- n) Un hombre que no es un hombre, viendo y no viendo a un pájaro que no es un pájaro, posado en un árbol que no es un árbol, le tira y no le tira con una piedra que no es una piedra. (Clearco)

15. Considerando cada uno de los siguientes razonamientos: a) determine cuál es la conclusión, b) diga si son deductivos o no deductivos justificando cada una de sus apreciaciones y c) valórelas desde los puntos de vista lógico, material y retórico.

- a) El postulado de las paralelas tiene su origen en representaciones sensoriales visuales y táctiles. Las paralelas se presentan, ópticamente, como rectas de un plano que no se cortan y, precisamente, como límites de las rectas secantes que se cortan en un punto lejano. En la representación táctil se presentan, por el contrario, como líneas equidistantes. La asociación conduce a que dos paralelas sean concebidas como rectas de un plano equidistantes. Y la hipótesis de la existencia de tales rectas implica notoriamente el postulado de Euclides sobre las paralelas. (Adaptado de Federico Enriques, *Problemas de la ciencia*).
- b) Los principios de la geometría no son hechos experimentales. Constrúyase un círculo material: médase el radio de la circunferencia y trátase de ver si la relación de esas longitudes es igual a π . ¿Qué se habrá hecho? Se habrá hecho una experiencia, no sobre las propiedades del espacio, sino sobre aquellas de la sustancia con la cual

se ha trazado ese redondel, y de aquella de que está hecho el metro que ha servido para las medidas. (Adaptado de H. Poincaré, *La Ciencia y la Hipótesis*, cap. V)

- c) El sujeto S prefiere p a q y prefiere q a r . Por lo tanto, S prefiere p a r .
- d) Un jardinero que cultiva su propio jardín con sus propias manos une en su persona los tres caracteres diferentes del terrateniente, el granjero y el labrador. Su producción, por lo tanto, debe brindarle la renta del primero, el beneficio del segundo y el salario del tercero. (I. Copi, *Introducción a la lógica*)
- e) Si tenemos dos relojes, uno que atrasa un minuto diario y otro que no funciona para nada, da mejor la hora aquel que no funciona, pues el que atrasa sólo dará la hora exacta una vez cada dos años, mientras que el otro la dará dos veces al día. (Adaptado de *The Complete Works of Lewis Carroll*).
- f) Pedro y Pablo son apóstoles. Los apóstoles son doce. Por lo tanto, Pedro y Pablo son doce. (G. Peano, *Aritmética General*, citado por F. Enriques, *Para la historia de la lógica*, p. 177).
- g) "... es propio del hombre instruído buscar la exactitud en cada género de conocimientos en la medida en que la admite la naturaleza del asunto; evidentemente, tan absurdo sería aprobar a un matemático que empleara la persuasión como reclamar demostraciones a un retórico." Aristóteles, *Ética Nicomaquea*, I, 3, 1094b 24-27.
- h) El ángulo α es obtuso y el β es recto. Por lo tanto, $\alpha > \beta$.
- i) Los estudiantes universitarios estudian medicina, derecho, ingeniería y arquitectura. Juan es un estudiante universitario. Por lo tanto, Juan estudia medicina, derecho, ingeniería y arquitectura.
- j) Cada uno de esos pulóveres tiene un 50% de descuento. De manera que si compro 2 de ellos, obtendré el 100% de descuento y así los llevaré gratis.
- k) Una vez, un señor temeroso de que en el avión en el que debía viajar subiese algún terrorista que llevase una bomba, decidió hacer el viaje cargando él mismo una bomba, pues pensaba que si había una cierta

probabilidad de que subiera una persona con una bomba era mucho menos probable que subieran dos personas con una bomba.

- l) Cada vez es mayor la cantidad de jóvenes que reciben instrucción en los colegios secundarios. Y también es verdad que ha aumentado la delincuencia juvenil. Esto significa que para eliminar la delincuencia juvenil es necesario cerrar los colegios secundarios.
- m) Todo aquel que deliberadamente golpee a otra persona deberá ser castigado. Este boxeador ha golpeado deliberadamente a su oponente. Por lo tanto, deberá ser castigado.
- n) Los roedores están muy distribuidos sobre toda la tierra. Este ratón es un roedor. Por lo tanto, este ratón está muy distribuido sobre la tierra.
- o) La teología enseña que el sol ha sido creado para iluminar la Tierra. Ahora bien, movemos la antorcha para iluminar la casa, pero no la casa para que ésta sea iluminada por la antorcha. Por consiguiente, es el Sol el que gira alrededor de la Tierra, y no la Tierra alrededor del Sol. (Besian Array, 1671, citado por Oscar Nocetti, *Falacias y medios de comunicación*, Buenos Aires, Humanitas, 1990).
- p) Es obvio que no debe permitirse el ingreso de mujeres en este colegio, pues ha sido de varones durante 400 años.
- q) Me dieron demás el vuelto en este negocio. No debo devolverlo, ya que si hubiera sido yo el que pagara de más, ellos no me lo habrían devuelto.
- r) Hay que aplicar la pena de muerte, porque seguramente los condenados no tuvieron piedad para quitarle la vida a otras personas.
- s) El senador X sostiene que no debemos autorizar la fabricación de misiles. No puedo entender por qué quiere dejarnos indefensos.
- t) El actual canciller de Alemania estuvo enrolado en la Juventud Hitleriana cuando tenía 3 años de edad. De modo que, con semejante antecedente, su pretendido plan de reformas tiene que ser facista.
- u) Debemos negarnos a imponer un impuesto especial a las comunicaciones vía modem. En una encuesta realizada por correo electrónico, el 95% de los consultados respondieron negativamente.

- v) Apostaré al caballo C. Ha ganado la mitad de las carreras que ha corrido en los últimos dos años, y perdió en las últimas cuatro. Por lo tanto, ahora le toca ganar.
- w) Nuestro adversario de esta noche, el Real Madrid, está puntero sin haber perdido ni un partido y es el mejor equipo del país. Por lo tanto, esta noche o bien les ganamos y conseguimos aumentar nuestra estima, o perdemos y salimos tapándonos la cara de vergüenza.

16. Un lenguaje formal no interpretado, ¿es meramente un conjunto de símbolos (¿qué significa “símbolo” aquí?) sin ningún contenido?. [Atención: si uno dice que sí tiene que explicar que dos sistemas que difieran sólo en la notación no son dos, sino uno.]

17. ¿En qué sentido un sistema de lógica matemática representa o modeliza los procesos reales de razonamiento?. ¿Es la lógica que aplicamos en situaciones reales para resolver problemas la que debe dirigir la construcción de sistemas de lógica formal, o, por el contrario, nuestras maneras naturales de razonar deben regirse por las normas dictadas por la lógica matemática?. ¿Nos enseña a pensar la lógica?.

18. Si los lenguajes formales pueden utilizarse para comprender las propiedades formales de estructuras físicas (óptica, mecánica, etc.), ¿pueden aplicarse de igual manera a la explicación de las propiedades formales y no formales de los lenguajes naturales?

19. He aquí siete paradojas clásicas. Se ha discutido mucho acerca de sus semejanzas y diferencias, de manera que será útil que intente compararlas. ¿Admiten todas el mismo tipo de solución? ¿Prueba la existencia de estas paradojas que hay fallas en la concepción tradicional de la lógica como la disciplina que estudia la normativa del pensamiento (es decir, como la disciplina que nos enseña cómo debemos pensar)?.

a) «Uno de ellos, su propio profeta (de Creta), dijo: "Los cretenses son siempre mentirosos, malas bestias, glotonos ociosos". Este testimonio es verdadero; por tanto, repréndelos duramente, para que sean sanos en la fe.» Epístola del Apóstol San Pablo a Tito, 1, 12-13.

b) El cocodrilo le pregunta a la madre: "¿Voy a comerme a tu niño?. Responde correctamente y te lo devolveré ileso." Y la madre le contesta: "Sí, te comerás a mi hijo". ¿Qué hizo el cocodrilo?

c) Los caníbales le proponen al cazador: "si lo que dices es verdad, serás hervido, y si lo que dices es falso serás asado", ¿Qué deberá decir el cazador?

d) Cuando Sancho Panza fue nombrado gobernador de la ínsula Barataria, tuvo que enfrentar problemas un tanto difíciles, como el que a continuación relató Cervantes. ¿Cuál le parece a Ud. que sería la decisión correcta?

-Señor, un caudaloso río dividía dos términos de un mismo señorío (y esté vuestra merced atento, porque el caso es de importancia y algo dificultoso). Digo, pues, que sobre este río estaba una puente, y al cabo de ella, una horca y una como casa de audiencia, en la cual de ordinario había cuatro jueces que juzgaban la ley que puso el dueño del río, de la puente y del señorío, que era en esta forma: "Si alguno pasare por esta puente de una parte a otra, ha de jurar primero adónde y a qué va; y si jurare verdad, déjenle pasar; y si dijere mentira, muera por ello ahorcado en la horca que allí se muestra, sin remisión alguna". Sabida esta ley y la rigurosa condición de ella, pasaban muchos, y luego en lo que juraban se echaba de ver que decían verdad, y los jueces los debajan pasar libremente. Sucedió, pues, que tomando juramento a un hombre, juró y dijo que para el juramento que hacía, que iba a morir en aquella horca que allí estaba, y no a otra cosa. Repararon los jueces en el juramento, y dijeron: "Si a este hombre le dejamos pasar libremente, mintió en su juramento, y, conforme a la ley, debe morir; y si le ahorcamos, él juró que iba a morir en aquella horca, y, habiendo jurado verdad,

por la misma ley debe ser libre". Pídesese a vuesa merced, señor gobernador, qué harán los jueces de tal hombre, que aún hasta ahora están dudosos y suspensos. Y habiendo tenido noticia del agudo y elevado entendimiento de vuestra merced, me enviaron a mí a que suplicase a vuestra merced de su parte diese su parecer en tan intricado y dudoso caso.

e) "El mínimo número natural no nombrable en menos de 26 sílabas" tiene 24 sílabas. Berry, 1906)

f) El conjunto de partes de un conjunto A $[P(A)]$ tiene más elementos que el mismo conjunto A (Teorema de Cantor). Sea B el conjunto de todos los conjuntos. Tenemos que

(1) $P(B) > B$ en lo que respecta al número de elementos.

Sin embargo, al ser B el conjunto de todos los conjuntos, tiene que cumplirse que $P(B)$ esté incluido en B. Y por definición de inclusión, si un conjunto está incluido en otro tiene, a lo sumo, igual número de elementos. Así que

(2) $P(B) \leq B$ en lo que respecta al número de elementos.
(Cantor, 1899)

g) El conjunto de todos los conjuntos que no son miembros de sí mismos, ¿es un miembro de sí mismo?. (B. Russell, 1902)

Unidad 2: El método *a priori* en matemáticas

Sistematización euclidiana de la geometría. Surgimiento, desarrollo y consecuencias de las geometrías no euclidianas. El método axiomático. Aritmetización de la geometría. Teoría cantoriana de conjuntos transfinitos. Métodos finitistas y no finitistas. Formalismo e intuicionismo matemáticos. Instrumentalismo. La verdad matemática.

Unidad 3: El método *a posteriori* en matemáticas.

Empirismo matemático primitivo. El método inductivo en matemáticas. Impacto en la teoría de números. Las matemáticas experimentales: aplicación en el desarrollo de la geometría fractal y en las teorías de redes neuronales artificiales.

El conocimiento a priori y el empírico

- El conocimiento empírico, o conocimiento *a posteriori*, es conocimiento basado en la experiencia, conocimiento cuya evidencia se extrae de la experiencia sensible. Uno puede creer sin evidencia, pero la creencia no es conocimiento si no se la justifica, y la justificación consiste en observaciones sensoriales. Entonces, conocimiento empírico es aquel que requiere justificación por medio de la experiencia.
- Conocimiento *a priori* es el que no necesita ser justificado por la experiencia [definición negativa que no nos dice qué hace falta para tener conocimiento *a priori* y distinguirlo así de la mera creencia].
- Una pregunta importante referida al método es si las matemáticas son empíricas, o son *a priori*, o una mezcla de ambas.
- ¿Cómo se alcanza el conocimiento *a priori*?
 - ¿Mediante una percepción especial de la realidad?
 - ¿Mediante la percepción de nuestra propia mente?
 - ¿Mediante la comprensión del lenguaje?
 - ¿O qué?

En resumen:

- o bien el juicio depende lógicamente de la experiencia y es *a posteriori*, es decir, la experiencia confirma o refuta el juicio.
- o bien no depende lógicamente de la experiencia y es *a priori*, es decir, la experiencia no lo confirma ni lo refuta.

Deducción: es el razonamiento en el que podemos saber *a priori* que si no se ha cometido ningún error lógico, y si las premisas son verdaderas, la conclusión ha de serlo también.

Inducción: es el razonamiento en el que se infiere una conclusión que expresa una conjetura empírica que va más allá de lo que dicen los datos. No se puede saber *a priori* que si los datos son ciertos la conclusión también lo será.

Relación entre deducción e inducción con los conocimientos empíricos y apriorísticos: en todo conocimiento empírico, al menos un paso en su obtención habrá de ser inductivo. Mientras que si lo que queremos obtener es conocimiento *a priori*, nuestra prueba será deductiva.

Juicios analíticos y sintéticos

Algunos creen que hay dos tipos de conocimiento *a priori*: el analítico y el sintético.

Definiciones de “analítico”

- Según Kant, un juicio es analítico si, y sólo si, se necesita la reflexión sobre los conceptos involucrados en el juicio y sobre la forma en que están combinados para saber si el juicio es verdadero.
- También se dice que una proposición es analítica si, y sólo si, es cierta en virtud de su forma lógica o, si recurriendo a definiciones puede traducirse a una proposición cierta en virtud de su forma lógica.
- Una proposición es analítica si es verdadera en todo mundo posible.

En cualquier caso, una afirmación analítica es siempre independiente de la experiencia y, por lo tanto, *a priori*.

Ejemplos de analítico: A es A; AB es A (los vertebrados con plumas tienen plumas, lloró con lágrimas, entró adentro, subió hacia arriba, si A está al norte de B y B está al norte de C, entonces A está al norte de C, etc.). **Importante:** nótese que las proposiciones analíticas no son informativas, es decir, no nos dicen nada que ya no supiéramos.

Ejemplos de sintético: A es B; los peces nadan; el planeta se está calentando; me duele la muela; los escoceses usaban pollera. Las proposiciones sintéticas siempre son informativas.

Ejemplos dudosos: el azúcar es dulce, la sal es salada.

Juicios sintéticos *a priori*: deben cumplir dos condiciones:

- a) Debe ser lógicamente independiente de la experiencia (por ser *a priori*)
- b) El predicado no debe estar contenido en el sujeto (por ser sintético)

Ejemplos de sintético a priori: todo lo que acontece en el mundo tiene una causa, la línea recta es la distancia más corta entre dos puntos, $7 + 5 = 12$, etc..

Posibilidades lógica, empírica y técnica

Todo lo que es técnicamente posible también es empírica y lógicamente posible. Ejemplo: lavarse los dientes. Cuando decimos que algo es técnicamente imposible nos referimos a la ausencia de medios materiales para realizarlo.

Todo lo que es empíricamente posible también es lógicamente posible, aunque pueda no serlo técnicamente. Ejemplo: cambiar el declive de la provincia de Buenos Aires para que no haya más inundaciones. Cuando decimos que algo es empíricamente imposible nos referimos a la violación de leyes de la naturaleza. No podemos hacer que el agua hierva a 50º C en condiciones normales a nivel del mar.

Todo lo que es lógicamente posible puede no serlo ni empírica ni técnicamente posible. Ejemplo: algunas escenas de dibujos animados. Si algo es lógicamente imposible ni siquiera podemos pensarlo, por ejemplo, un círculo cuadrado.

Distinguir entre lo que es imposible pensar de lo que es imposible de imaginar: puedo pensar (es decir, no es contradictorio pensar) en un polígono de 10^{100} lados, aunque no pueda imaginármelo.

Verdad necesaria y contingente

Verdad necesaria	Verdad contingente
• La que no puede ser de otra manera	• Sí puede ser de otra manera
• Su negación es imposible o contradictoria	• Su negación es posible o consistente
• Es verdadera en todos los mundos posibles	• Verdadera en este mundo o en algún mundo

Modelo aristotélico de ciencia

Aristóteles (384-322 a.C.) contrapone:

opinión	ciencia
* Puede ser verdadera o falsa	* Sólo puede ser verdadera
* Falible	* Infalible
* Tiene por objeto lo contingente	* Tiene por objeto lo necesario
* Se deriva de cualquier cosa	* Procede de principios demostrativos
* Incierta	* Cierta (por demostración)

Para Aristóteles el conocimiento científico procede de la siguiente manera:

1. Casuística: búsqueda de casos
2. Muestras: colecciones de casos
3. Inducción por enumeración simple: ¿ocurre en general lo que ocurre en los casos?
4. Intuición intelectual: justificación
5. Establecimiento de los axiomas

Requisitos de las explicaciones científicas:

- (1) Las premisas deben ser verdaderas
- (2) Las premisas deben ser indemostrables
- (3) Deben conocerse mejor que la conclusión
- (4) Deben ser causas de la atribución hecha en la conclusión.

Para que una relación de atribución sea causal, el atributo debe aplicarse a todos los casos del sujeto, tiene que ser verdadero propiamente del sujeto y no como parte de un todo mayor, y debe ser esencial para el sujeto.

Pero el primer requisito no se cumple en los casos disposicionales (si echamos azúcar en un vaso de agua el azúcar se disuelve, ¿por qué?: porque es soluble en agua. ¿Es la solubilidad del azúcar la causa de que se haya disuelto?). Y además no dio criterios para la identificación de predicaciones esenciales, sólo dio ejemplos.

El conocimiento científico debe ser universal

- Universalmente se sabe más. El que sabe el universal, sabe el particular.
- Existen más porque son imperecederos.
- El universal es causa.
- Se llega al mayor conocimiento posible sin intermediarios.
- Las cosas singulares son infinitas y por eso no se las puede terminar de conocer.
- La demostración que procede del principio es mejor si está más cerca del principio.

(Relacionar esto con la razón de construir sistemas axiomáticos: buscamos un sentido de la multiplicidad reduciéndola a la simplicidad. Riqueza de conexiones lógicas entre pocos elementos.)

Caracterización de Beth de la ciencia aristotélica

1. La ciencia se ocupa de entidades de cierto género. La ciencia es un conjunto de afirmaciones. Es un discurso con referencia semántica fuera del lenguaje (semántica presupuesta). Además, para cada género de objetos hay una ciencia. (Supuesto de realidad)
2. Las afirmaciones de la ciencia son verdaderas. (supuesto de verdad)
3. Las consecuencias lógicas de afirmaciones de una ciencia también pertenecen a esa ciencia. Todos los enunciados de una ciencia deben estar conectados deductivamente. Sistemática. Progreso. (Supuesto de lógica)
4. Ciertos términos se aceptan sin definición; los restantes términos se definen.
5. Las afirmaciones de una ciencia se aceptan cuando son autoevidentes e indemostrables (axiomas) o cuando se deducen de los axiomas (demostraciones)
6. Las afirmaciones de la ciencia son universales.
7. Las afirmaciones de la ciencia son necesarias.

Crítica al supuesto de realidad:

(a) La forma lógica de los enunciados científicos reflejan la realidad. Todos los enunciados tienen la forma S es P. Por lo tanto, la realidad está estructurada sólo por sujetos y propiedades. Pero no pueden representarse en este esquema las relaciones.

(b) No es cierto que todas los enunciados de todas las ciencias hagan referencia a objetos externos. P. ej. Geometría. Formalismo. Lógica y matemáticas no serían ciencias.

(c) No hay una ciencia para cada género de objetos. Morris Katz, pintor de NY, clasificaba los hoteles según el tipo de papel higiénico que usaban.

Crítica al supuesto de verdad:

Para Aristóteles las propiedades de verdad y falsedad son una característica de los enunciados y no de las palabras ni de las cosas. (*Met. E*)

"Decir de lo que es que no es, o de lo que no es que es, es falso, mientras que decir de lo que es que es, o de lo que no es que no es, es verdadero". Ver Tarski

- (a) Esta concepción de la verdad conduce a paradojas.
- (b) Concibe al lenguaje como semánticamente cerrado.
- (c) Es aplicable a enunciados de cualquier lenguaje, ya sea natural o formal.
- (d) Es objetable su aplicabilidad a las Matemáticas puras.

Crítica al supuesto de lógica:

(a) La silogística aristotélica no es toda la lógica. Muchos teoremas de Euclides no se habrían podido demostrar si sólo se hubiera utilizado la silogística.

Clasificación de los conocimientos:

Los conocimientos se pueden clasificar de acuerdo a su jerarquía científica en : 1) conocimientos que son **exclusivamente demostrativos** y, por lo tanto, indemostrables; 2) conocimientos que **tanto pueden servir para demostrar como para ser demostrados**: proposiciones que expresan propiedades inmediatamente derivadas de la esencia; 3) **conocimientos que sólo pueden ser demostrados**; son proposiciones que expresan propiedades secundarias de los objetos.

Los **principios**, o conocimientos del primer tipo son:

(1) Axiomas: las cosas que uno debe saber para aprender algo". Comprenden a "los principios que son verdaderos de todas las cosas que son (identidad, contradicción y tercero excluido), y también principios de menor generalidad pero aplicables a todas las cantidades. Los axiomas son principios formales (conocimientos con arreglo a los cuales se efectúa cualquier demostración y, por lo tanto, nada puede demostrarse sin ellos).

(2) Tesis: son aquellas premisas que no pueden ser probadas pero que no son tales que nada pueda ser probado sin ellas. No son pues como los axiomas, presuposiciones necesarias de todo aprendizaje aunque sean premisas imprescindibles para una ciencia particular determinada.

Las tesis son de dos tipos:

(a) **Hipótesis**: tesis que establecen que tal entidad existe o no; son, pues, supuestos de existencia. Ej.: existe la unidad

(b) **Definiciones**: son meras definiciones nominales que no garantizan la existencia de lo definido; para ello deben estar coordinadas con hipótesis. Expresan la esencia de los objetos referidos. Tales definiciones son por género próximo y diferencia específica. Ej.: una unidad es lo indivisible en cantidad.

Los primeros principios de una ciencia particular no están sujetos a deducción de otros principios más básicos. Ejemplo: los primeros principios de la Física aristotélica son:

(1) Todo movimiento es o natural o violento.

(2) Todo movimiento natural es un movimiento hacia un lugar natural; p. ej. los objetos sólidos se mueven por naturaleza hacia el centro de la Tierra.

(3) El movimiento violento está causado por la acción continua de un agente (la acción a distancia es imposible)

(4) El vacío es imposible.

Principales argumentos para considerar que la Geometría es una ciencia a priori

* Argumento de Platón: la geometría no puede basarse en la experiencia sensible porque ésta nunca entra en contacto con auténticas rectas, puntos, planos, figuras, etc. Pero, ¿es cierto eso? ¿Qué pasa con los ejemplos ideales en física (péndulo ideal)?

* Argumento de Kant: no pueden ser empíricos porque su necesidad y universalidad es más fuerte que cualquier generalización empírica y no hay nueva evidencia que los confirme más. Ej.: 2 rectas no pueden tener más de un punto en común: he aquí dos rectas que se cortan en un punto, ¿cómo podrían cortarse en alguna otra parte?

Los postulados y las demostraciones más fundamentales son sintéticos para Kant, lo cual hace de la geometría y del resto de las matemáticas auténticas ciencias. Pero si son sintéticos, ¿cómo llegamos a conocerlos?.

Intuición racional en Descartes.

Anámnesis platónica.

GEOMETRIAS NO EUCLIDIANAS

Isaac Barrow^[1] (1630-1677), maestro y predecesor de Newton en Cambridge enumeraba 8 razones para la certidumbre de la geometría euclidiana:

1. La claridad de sus conceptos.
2. La falta de ambigüedad de sus definiciones.
3. Nuestra seguridad intuitiva de la verdad universal de las nociones comunes.
4. La clara posibilidad y fácil imaginabilidad de sus postulados.
5. El pequeño número de sus axiomas.

6. La forma claramente concebible en que son generadas las magnitudes.
7. El fácil orden de las demostraciones.
8. La evitación de cosas no conocidas.

La geometría de Gauss - Bolyai - Lobachevsky (hiperbólica)

Karl Friedrich Gauss (1777-1855), fue profesor de Astronomía y director de observatorio de Gotinga durante 50 años. A los 25 de edad ya predecía el movimiento de los cometas. Funda la ciencia de la geodesia haciendo un mapa de la ciudad de Hannover. Estableció un método de medición del campo magnético de la Tierra. En 1792 (cuando tenía 15 años) ya sabía que podía elaborarse una geometría lógicamente correcta en la que no se cumpliera el V Postulado, tal como lo cuenta en una de sus cartas a un amigo. Pero recién comienza a desarrollarla a partir de 1813. En una carta a su amigo Taurinus datada en 1824 escribe: *la suposición de que la suma de los ángulos [de un triángulo] es menor de 180° conduce a una curiosa geometría, bastante diferente de la nuestra [la euclídea] pero plenamente consistente, que he desarrollado a mi entera satisfacción. Los teoremas de esta geometría parecen paradójicos y, para los no iniciados, absurdos; no obstante, una reflexión tranquila y sosegada revela que no contienen en absoluto nada imposible*^[2].

Nikolai Ivanovich **Lobachevsky** (1793- 1856). Sus primeros trabajos datan de 1826.

Johann **Bolyai** (1802-1860). Sus primeros trabajos datan de 1823.

Gauss, Lobachevsky y Bolyai desarrollaron las consecuencias de la hipótesis del ángulo agudo. Dadas una recta AB , un punto P exterior a ella, y una perpendicular a que une P con AB , supusieron la existencia de dos rectas, p y q , tales que no cortan a AB y cualquier otra recta que pase por P y forme un ángulo agudo menor que r cortará a AB . Pero si el ángulo es mayor que r no la cortarán. p y q son paralelas al segmento AB . Las que no son paralelas ni tampoco cortan a AB se llaman intersecantes, aunque puede decirse que son paralelas en el sentido de Euclides.

Se obtuvo que:

- a) Por un punto exterior a una recta siempre se puede trazar más de una paralela a dicha recta.
- b) La suma de los ángulos internos de un triángulo siempre es menor que dos rectos, proporcionalmente al área del triángulo.
- c) Los triángulos de áreas diferentes nunca pueden ser semejantes.
- d) La razón de una circunferencia a su diámetro es mayor que π , proporcionalmente al área del círculo.

La geometría de Riemann (elíptica)

Uno de los objetivos de **Riemann** en su conferencia para Privatdozent de 1868 era mostrar que los axiomas de Euclides eran en realidad verdades empíricas, más que verdades evidentes por sí mismas

Hermann von **Helmholtz** (1821-1894) en *Contar y medir*, ataca la verdad matemática. La aritmética no se aplica automáticamente a los fenómenos físicos. Solamente la experiencia puede decirnos dónde se deben aplicar las leyes de la aritmética.

Helmholtz y Riemann desarrollaron independientemente la hipótesis del ángulo obtuso.

Sus consecuencias fueron:

- a) Cada recta puede prolongarse hasta un máximo.
- b) Por dos puntos dados puede trazarse más de una recta.
- c) La suma de los ángulos internos de un triángulo suman más de dos rectos.
- d) La razón de la circunferencia al diámetro es menor que π y disminuye proporcionalmente al disminuir el área del círculo.

Riemann no desarrolló su geometría desde un punto de vista postulacional, sino generalizando y extendiendo la noción de "curvatura" que empleaba Gauss. Gauss había utilizado la noción de "geodésica": línea que extendiéndose dentro de una superficie es la más corta entre dos puntos.

Cómo sean las geodésicas depende de la curvatura:

En el plano todas las geodésicas son rectas.

curvatura cero

En la esfera son arcos de círculos máximos. (Riemann)

curvatura positiva uniforme

En el huevo son diferentes para cada par de puntos.

curvatura positiva variable

En la silla de montar la curvatura es negativa.

Curvatura: radio de curvatura: es el radio de cierto círculo que coincide, por decirlo así, con una parte infinitesimal de la línea en el punto en cuestión. Si una línea curva es casi recta, el radio de curvatura es largo. Si es muy curva, el radio de curvatura es corto.

Medición de la curvatura de una superficie en un punto:

1. Se mide la curvatura de dos geodésicas que se interceptan en el punto y que dan dos direcciones principales.

2. La curvatura de la superficie es el producto de los dos recíprocos de los dos radios de curvatura de ambas geodésicas. Es decir: $1/R_1$ por $1/R_2$.

En la silla de montar, la curvatura en el punto C es 1 sobre el radio de curvatura de FCD por el radio de curvatura de GCE, tomando a uno como negativo, la curvatura siempre será negativa.

En este modelo, el perímetro de la circunferencia crece y, por lo tanto, π también crece.

Riemann generalizó la noción de curvatura de Gauss de manera que pudiera aplicarse a regiones tridimensionales del espacio.

En Euclides: espacio homogéneo de curvatura cero.

En Lobachevsky: espacio homogéneo de curvatura negativa.

En Riemann: espacio homogéneo de curvatura positiva y posibilidad de considerar cualquier otra clase de espacio no homogéneo (e.e., cuya curvatura no sea constante).

En resumen:

Interpretación del plano riemaniano

Euclides	Riemann
Plano	Superficie de una esfera
Recta	Círculo máximo
Punto	Par de puntos opuestos

Se verifica que:

1. Dos "puntos" determinan una recta.

2. Dos "rectas" siempre tienen un "punto" en común. No hay ningún par de rectas que no se corten.
3. Dos perpendiculares a una recta no son paralelas
4. Los ángulos internos de un triángulo suman más de 180° . Pueden ser los tres ángulos rectos ($= 270^\circ$)
5. Todas las geodésicas tienen la misma longitud finita y son cerradas.
6. La razón de la circunferencia a su diámetro es menor que π . En la esfera modelo tomemos un paralelo terrestre con centro en el polo norte. Esto corresponde a un círculo en el plano riemaniano. Su radio no es CB, sino el arco NB. $\pi = \text{Per}/\text{Diám}$. Al ser el diámetro ANB mayor, π decrece.

Jules Henri Poincaré (1854-1912)

Nació en Nancy. Ingeniero de minas. Profesor de análisis matemático en Caen y de matemáticas, física y astronomía en Paris. Algunas obras: *La ciencia y la hipótesis* (1902), *El valor de la ciencia* (1905), *La ciencia y el método* (1908), *Ultimos pensamientos* (1912).

Los axiomas geométricos no son ni intuiciones sintéticas *a priori* ni hechos experimentales. Son convenciones o definiciones (estipulativas) disfrazadas.

Los axiomas no son arbitrarios. Son convenientes, tal como puede serlo el fraccionamiento decimal de la moneda.

Las convenciones también tienen su papel en física. P. ej.

$$F =_{\text{def}} m \cdot a$$

este principio queda fuera del alcance de cualquier experimento futuro.

En realidad, Poincaré no creía que la ciencia consistiese sólo en convenciones. El que pensaba eso era Le Roy. Decía que la ciencia no puede enseñarnos la verdad, sino que sólo puede servirnos de regla para la acción. Poincaré, en cambio, piensa que la ciencia hace predicciones y que éstas son falsables. Algunas generalizaciones empíricas se convierten en definiciones.

La ciencia aspira a alcanzar la verdad acerca del mundo. La ciencia supone la unidad y la simplicidad de la naturaleza.

La ciencia no nos brinda conocimiento de la esencia de las cosas, sino sólo de sus relaciones.

La simplicidad es el criterio para la elección de teorías.

Creía que existían algunas proposiciones matemáticas, como el principio de inducción matemática, que eran sintéticas *a priori*, de manera que no opinaba que la filosofía kantiana de las matemáticas hubiera caducado.

El problema de la consistencia

Si la geometría de Euclides es la verdadera del espacio físico, las otras deberían ser inconsistentes. Sin embargo las geometrías de Lobachevsky y Riemann no presentaban teoremas contradictorios. Esto llevó a que se aumentara el rigor lógico de los procedimientos de deducción de teoremas, y por eso se crearon sistemas abstractos para presentar demostraciones válidas solamente en virtud de su forma lógica. Abstractos con respecto a la verdad o falsedad de sus proposiciones. Y abstractos con respecto al significado de sus términos no lógicos (por eso se eliminan las definiciones de los primitivos)

Distinguir entre Geometría no interpretada y sus interpretaciones, y también entre Geometría pura y aplicada. La de Euclides no es aplicada, no es ingeniería. Los Elementos son un sistema interpretado, no aplicado.

Para considerarlo como no interpretado abstraemos su forma lógica, es decir, no se presta atención a los significados de los términos no lógicos ni a la posible verdad o falsedad de los axiomas y teoremas. Ejemplos:

1. Por dos puntos pasa una única recta.
- 1'. Dos P están en la relación R con Q.
- 1''. Por dos focos luminosos pasa un único rayo.
- 1'''. Por dos liebres pasa el tiro de una única escopeta.

Inconsistencia

Los opositores de las geometrías no euclidianas esperaron demostrar que éstas son inconsistentes. Nos referimos a inconsistencia sintáctica.

Hay una ley lógica que dice

$$\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$$

si, además, tuviéramos en el sistema una contradicción como $(p \wedge \neg p)$, podríamos demostrar cualquier cosa.

En un sistema interpretado inconsistente: no todos los axiomas son verdaderos simultáneamente.

En un sistema sin interpretar inconsistente: no podríamos hallar interpretación que haga verdaderos a todos los axiomas.

Demostraciones de consistencia:

1. Dar una interpretación que haga verdaderos a todos los axiomas.
2. Dar una demostración relativa de consistencia interpretando un sistema en otro.
- 2'. Interpretar la geometría euclidiana en términos de la aritmética de los números reales. Punto: terna de reales. Línea, figura, etc., ecuaciones lineales, series de ternas.

La geometría interpretada como empírica

Línea recta =_{def}

1. La distancia más corta entre dos puntos.
2. El camino de un rayo de luz a través de un medio de refracción uniforme.
3. La trayectoria de un cuerpo en movimiento no sometido a fuerzas externas.

Cualquier afirmación que involucre la línea recta en alguno de estos sentidos es una cuestión empírica.

La geometría interpretada como a priori

Línea recta =

1. Un triángulo cuyos lados son rectos debe tener ángulos cuya suma sea igual a dos rectos. Así, si un triángulo tiene sus ángulos que suman más o menos de dos rectos, podemos decir que sus lados no son rectos.

Al describir el resultado de la teoría de la relatividad de Einstein no debemos decir que hay triángulos no euclidianos, sino que la luz no se propaga en línea recta.

RUSSELL	POINCARÉ
De todas las geometrías, sólo una es la verdadera.	No tiene sentido hablar de geometrías verdaderas o falsas, pues cada una de ellas son convenciones.
Para todo discurso es necesario determinar, y en el orden estipulado: a) la referencia de sus términos; b) lo afirmado por sus enunciados.	En relación a los axiomas de la geometría debe invertirse la propuesta de Russell: los axiomas definen implícitamente el significado de los términos geométricos que aparecen en ellos.
Los objetos son dados “previamente” en tanto referentes de los términos.	Los axiomas, al definir implícitamente determinados términos geométricos, hacen que los objetos sean identificables solamente a través de ellos.
Las proposiciones de la geometría son identificables como verdaderas o falsas respecto de objetos identificables independientemente de ellas.	Los axiomas de la Geometría no son ni verdaderos ni falsos, ni lo son de objetos indistinguibles independientemente de ellos. Por ello, no son ni analíticos ni sintéticos, ni a priori ni a posteriori: son definiciones.
Puede concluirse la verdad de los enunciados de la Geometría.	Ni los hechos, ni las consideraciones a priori pueden establecer su verdad.

FREGE	HILBERT
En la sistematización de la Geometría (como de cualquier otra disciplina) debe respetarse rigurosamente un cierto ordenamiento: las definiciones son anteriores a los axiomas, los cuales no deben usar término alguno cuyo significado no haya sido dado previamente.	Ciertos axiomas definen los términos geométricos usados en ellos. Los axiomas no usan términos geométricos con un significado preciso ya dado; es a través de ellos que los términos adquieren significación.

La provisión de "significado" y "referencia" debe ser siempre previa a la aserción.	No necesariamente. El orden debe invertirse para los axiomas.
En el desarrollo axiomático de la Geometría se presupone el significado habitual u ordinario de los términos geométricos.	El desarrollo de la Geometría debe efectuarse con total independencia de los significados de los términos utilizados.
La Geometría se refiere a un determinado tipo de entidades previamente estipuladas.	No debe presuponerse nada como conocido: la Geometría ha de ser establecida como una ciencia sin una temática previamente establecida.

Problemas de fundamentos de matemáticas

Definición cantoriana de "conjunto": «Por un "conjunto" entendemos cualquier colección M de objetos determinados y bien distintos m de nuestra percepción o de nuestro pensamiento (que se denominan los "elementos" de M), reunidos en un todo». G. Cantor, *Contribuciones al fundamento de los números transfinitos*, 1895.

Prohibir el conjunto de todos los cardinales nos incapacita para introducir el conjunto de los naturales, a menos que sepamos de antemano que ellos no son todos los cardinales.

Prohibir el conjunto de todos los conjuntos entra en conflicto con la definición cantoriana de conjunto. No podemos disponer de la teoría de conjuntos si no disponemos de teoremas acerca de todos los conjuntos, en cuyo caso todos los conjuntos constituyen un conjunto de acuerdo con la definición de Cantor.

Charles Parsons (1967) concluye de las paradojas que no debemos detener o limitar el proceso de formación de conjuntos cada vez mayores y mayores. Por el contrario, nunca debemos ver el proceso como habiendo obtenido todos los conjuntos. La totalidad de los conjuntos y la totalidad de los ordinales, no puede ser el término de un proceso de generación bien definido.

Las paradojas destruyeron definitivamente el platonismo absoluto, la suposición de una totalidad de objetos matemáticos que puede tratarse como si ella misma fuera un objeto matemático.

En reemplazo de Cantor, se utiliza una versión axiomática de la teoría de conjuntos debida a Zermelo (1908) y Fraenkel (1922-25).

Definición impredicativa: cuando un conjunto M y un objeto particular m son definidos de manera que, por un lado m es un miembro de M , y por otro, la definición de m depende de M , decimos que la definición es impredicativa.

Por ejemplo, la definición del conjunto de partes $[P(A)]$ de un conjunto es impredicativa.

Poincaré creía que la causa de las paradojas residía en las definiciones impredicativas

Russell estableció el Principio del Círculo Vicioso: ninguna totalidad puede contener miembros definibles sólo en términos de esa totalidad, o miembros que envuelvan o presupongan esta totalidad.

Lástima que partes del análisis utilizan definiciones impredicativas

Escuela	Ontología	Metodología	Justificación
Logicismo (Russel, Frege, Tarski)	Hipótesis Realista	Deducción	Lógica axiomática con $p \vee \neg p$
Intuicionismo (Brouwer, Heyting)	Conceptualista	Constructiva	Intuición intelectual sin $p \vee \neg p$
Formalismo (Hilbert, Bernays, Ackerman, von Neumann)	Nominalista	Cálculo	Intrasistemática

Ejercicios

1. Evalúe las siguientes afirmaciones e intente decidir, mediante argumentos, cuál es más correcta:

- a) En Matemáticas no puede demostrarse todo. Por lo tanto, las matemáticas carecen de fundamento y están, en lo que respecta a la certeza, al mismo nivel que las creencias en dioses o fantasmas.

- b) Sí puede demostrarse todo. Los teoremas se basan en los principios, y éstos, a su vez, encuentran justificación en los teoremas. Las Matemáticas son como una red, en la que las afirmaciones se apoyan unas en otras.
- c) No puede demostrarse todo. De aquí se sigue que existen afirmaciones indemostrables, las cuales sirven de base a todas las demás.

[Ayudas: 1) fíjese si son realmente incompatibles; 2) analice diferentes conjuntos de características definitorias alternativas para el término “demostración”; 3) puede tomar como ejemplo cualquier teorema de análisis o álgebra.]

2. Examine las siguientes definiciones tomadas de *Euclid's Elements of Geometry* editados por J. Hamblin Smith (5ta. edición, London, Edimburgh University Press, 1883) y conteste las preguntas que se formulan a continuación.

- I. *Un punto es lo que no tiene partes.*
- II. *Una línea es longitud sin anchura.*
- III. *Los extremos de una línea son puntos.*
- IV. *Una línea recta es la que yace en la misma dirección de un punto a otro a través de su longitud.*
- V. *Una superficie es aquello que tiene solamente largo y ancho.*
- VI. *Los extremos de una superficie son líneas.*
- VII. *La superficie de un plano es tal que, si se toman dos puntos cualesquiera que le pertenezcan, la recta que los une yace completamente en esa superficie.*

- a) ¿Qué tipo de definiciones cree que son?. ¿Son **nominales**, en el sentido de estipular cómo se usará un término dentro de un contexto, o **léxicas**, en el sentido de mostrar cómo usa la gente estas palabras?. ¿Son **descriptivas**, es decir, pretenden mostrar las características definitorias de cierto conjunto de objetos?. ¿Son **teóricas**, señalando con ello que se intenta explicar lo que un término **debe** significar para poder construir la teoría?.
- b) ¿Violan alguna de las reglas estudiadas para definir correctamente un término?

- c) Algunos piensan que estas definiciones no son **suficientes**, pues no se definen **todos** los términos involucrados (por ejemplo, “parte”, “longitud”, “anchura”, “dirección”, etc.), ni tampoco se alcanza cuáles términos permanecerán indefinidos, es decir, cuáles se considerarán **primitivos**. ¿Son válidas estas observaciones?. ¿Los considera **errores** de Euclides?. Si así fuera, ¿se pueden corregir?. ¿No estaremos frente a definiciones **implícitas**, en las que los términos se comprenden por la relación que tienen unos con otros?.
- d) ¿Es lógicamente posible que algo no tenga partes?. ¿Y que existan superficies aparte de cualquier sólido, o puntos aparte de cualquier línea?.

3. Tomando como base las definiciones del ejercicio 3., construya dos modelos gráficos: uno en el que el **plano** sea el supuesto por Euclides, y otro en el que el plano sea la superficie de una esfera. Luego, compruebe que es perfectamente posible cumplir con las definiciones. Si los postulados de Euclides son:

- I. Dos puntos determinan una recta.
 - II. Las rectas son infinitamente prolongables.
 - III. Hay círculos tan grandes como se quiera con centro arbitrario.
 - IV. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.
 - V. Si una recta incidente sobre dos rectas hace ángulos internos y de la misma parte menores que dos rectos, prolongadas esas dos rectas al infinito coincidirán por la parte en que estén los ángulos menores que dos rectos.
- a) Muestre que alguno de ellos es inconsistente con el modelo esférico.
- b) Ofrezca un conjunto de postulados alternativos consistente con el modelo esférico.
- c) Defina el término “triángulo” para el nuevo modelo, y muestre que la suma de sus ángulos internos puede ser mayor que 180 grados.
- d) ¿Qué sucede con la razón de la circunferencia al diámetro en el modelo esférico?
- e) Si las paralelas son rectas que jamás se cortan al prolongarlas, ¿cuántas paralelas a una recta dada pueden trazarse?

4. Examine críticamente los siguientes párrafos:

a) Concebimos que el espacio es aquello donde se colocan todos los cuerpos ... que es enteramente penetrable, recibiendo a todos los cuerpos en él, y no negando el acceso a ningún tipo de cosa; que está inalterablemente fijo, incapaz de ninguna acción, forma o cualidad; cuyas partes no es posible separar unas de otras, por grande que sea la fuerza que se aplique; mas el espacio, siendo él mismo inmóvil, acepta las sucesiones de las cosas en movimiento, determina las velocidades de sus movimientos y mide las distancias de las cosas mismas. (Keill, J., *An introduction to natural philosophy*, Andrew Millar, Londres, 1758, p. 15)

b) He aquí cómo llegan a formarse los hombres la noción de espacio. Consideran que muchas cosas existen a la vez y observan en ellas un cierto orden de coexistencia, según el cual la relación de unas a otras es más o menos simple. Es su situación o distancia. Cuando sucede que una de esas cosas coexistentes varía su relación a una multitud de otras, sin que la varíen entre ellas, y que otra cosa, recién llegada, adquiere la misma relación a las otras que tenía la primera, decimos que ha ocupado su lugar. ... Y suponiendo o fingiendo que entre esos coexistentes hay un número suficiente de ellos, que no han tenido ningún cambio en ellos; entonces diremos que aquellos que tienen una relación a esos existentes fijos, como otros la tenían a ellos antes, tienen ahora el mismo lugar que esos otros habían tenido. Y a lo que contiene a todos estos lugares se le llama espacio. (Alexander, H. G. (ed.), *The Leibniz-Clarke Correspondence*, Manchester University Press, Manchester, Inglaterra, 1956, p. 69)

Llamamos a la opinión expresada en a) concepción absoluta del espacio físico y a la b) concepción relacional. ¿Cuál de las dos le parece a Ud. mejor fundada y por qué?

5. Explique la incompatibilidad existente entre las siguientes posiciones con respecto al origen de las nociones geométricas.

a) El postulado de las paralelas tiene su origen en representaciones sensoriales visuales y táctiles. Las paralelas se presentan, ópticamente, como rectas de un plano que no se cortan y, precisamente, como límites de las rectas secantes que se cortan en un punto lejano. En la representación táctil se presentan, por el contrario, como líneas equidistantes. La asociación conduce a que dos paralelas sean concebidas como rectas de un plano equidistantes. Y la hipótesis de la existencia de tales rectas implica notoriamente el postulado de Euclides sobre las paralelas. (Adaptado de Federico Enriques, *Problemas de la ciencia*).

b) Los principios de la geometría no son hechos experimentales. Constrúyase un círculo material: mídase el radio de la circunferencia y trátase de ver si la relación de esas longitudes es igual a π . ¿Qué se habrá hecho? Se habrá hecho una experiencia, no sobre las propiedades del espacio, sino sobre aquellas de la sustancia con la cual se ha trazado ese redondel, y de aquella de que está hecho el metro que ha servido para las medidas. (Adaptado de H. Poincaré, *La Ciencia y la Hipótesis*, cap. V)

6. Unos pequeños seres bidimensionales viven, se mueven y manipulan objetos bidimensionales en un planeta bidimensional llamado *Flatland*, el cual tiene la forma de la superficie de una esfera. *Flatland* es tan grande como la Tierra, y sus habitantes tan pequeños como hormigas. Esto les impide dar la vuelta completa a su planeta y se ven limitados a vivir en una pequeña parte de él. La pregunta es: ¿pueden estos seres, haciendo mediciones internas sobre la superficie bidimensional del planeta, descubrir si viven en un plano, una esfera o una superficie de otro tipo? (Versión de R. Carnap, *Fundamentación Lógica de la Física*, Orbis, 1985, p. 127) de un argumento utilizado por Gauss y retomado por Helmholtz y Clifford. *Flatland*, es un cuento de Edwin A. Abbot que está disponible en varias bibliotecas electrónicas de Internet).

7. Considere esta versión simplificada del “Círculo de Klein”: sea C un círculo. Llámense

- “plano” a la región interna de C .
- “punto impropio” a cualquier punto de la circunferencia de C , es decir, que pertenece a la circunferencia de C pero no al plano que delimita. (También puede llamarse a la circunferencia “infinito”).
- “recta” a una cuerda de C .
- “rectas paralelas” a cualesquiera dos “rectas” que tienen en común un “punto impropio” (es decir, dos cuerdas de C con un extremo en común).

Muestre gráficamente cuántas paralelas a una recta dada pueden trazarse en el modelo.

8. Se ha observado que un peso A de 10 gramos y un peso B de 11 gramos producen sensaciones idénticas. También se vió que el peso B no puede distinguirse del peso C de 12 gramos. Sin embargo, se distingue fácilmente el peso A del peso C . Tenemos así que, para nuestra experiencia, se cumple lo siguiente

$$(1) \quad A = B, \quad B = C \quad \text{y} \quad A < C$$

¿Contradice la experiencia a las matemáticas en este caso? ¿Donde se origina la idea de que la afirmación (1) es incorrecta?. Poincaré pensaba que había en esto un desacuerdo intolerable con el principio de no contradicción. Dice "No podemos creer que dos cantidades iguales a una tercera no sean iguales entre sí, y así somos llevados a suponer que A es diferente de B , y B de C , pero que la imperfección de nuestros sentidos no nos había permitido discernirlo"

9. Examine los siguientes argumentos a favor de que la geometría no puede ser una ciencia experimental.

1. Si lo fuera, sus afirmaciones sólo serían aproximadamente verdaderas.
2. Las experiencias sólo nos hacen conocer las relaciones de los cuerpos entre sí, ninguna lleva ni puede llevar a las relaciones de los cuerpos con el espacio, o a las relaciones mutuas de las diferentes partes del espacio.
3. Cualquier comprobación experimental que hagamos sobre las propiedades de un cuerpo material serán acerca de ese cuerpo y nunca acerca del espacio como tal.
4. La geometría sólo se ocupa de entidades ideales. La experiencia nunca entra en contacto con auténticas rectas, puntos, planos, figuras, etc.

10. En un cuarto de 30 pies de longitud, 12 de alto y 12 de ancho hay una araña en el centro de una de las paredes menores a un pie del cielorraso y también hay una mosca en el medio de la pared opuesta, a un pie del piso. La araña tiene intenciones fáciles de concebir con respecto a la mosca. ¿Cuál es la ruta más corta posible siguiendo la cual la araña puede arrastrarse para alcanzar a su presa?. Kasner y Newman (*Matemáticas e imaginación*, Madrid, Hyspamérica, 1985, p. 187) concluyen que “nuestras nociones intuitivas acerca del espacio nos conducen casi invariablemente, por el mal camino”. Analice esta conclusión mostrando que, o bien a) existe una jerarquía de intuiciones (unas más básicas y otras más superficiales) o bien b) debemos renunciar a nuestras intuiciones como fundamento de nuestras creencias matemáticas y refugiarnos en la convencionalidad de los sistemas formales no interpretados.

11. Genere un sistema formal arbitrario $S = \langle V, RF, RT \rangle$. Demuestre al menos un teorema y ofrezca dos interpretaciones del mismo utilizando dominios diferentes.

12. Un lenguaje formal no interpretado, ¿es meramente un conjunto de símbolos (¿qué significa “símbolo” aquí?) sin ningún contenido?. [Atención: si uno dice que sí tiene que explicar que dos sistemas que difieran sólo en la notación no son dos, sino uno.]

13. ¿En qué sentido un sistema de lógica matemática representa o modeliza los procesos reales de razonamiento?. ¿Es la lógica que aplicamos en situaciones reales para resolver problemas la que debe dirigir la construcción de sistemas de lógica formal, o, por el contrario, nuestras maneras naturales de razonar deben regirse por las normas dictadas por la lógica matemática?. ¿Nos enseña a pensar la lógica?.

14. Si los lenguajes formales pueden utilizarse para comprender las propiedades formales de estructuras físicas (óptica, mecánica, etc.), ¿pueden aplicarse de igual manera a la explicación de las propiedades formales y no formales de los lenguajes naturales, o considera que éstos tienen alguna característica que los hace intratables formalmente?

15. En un sistema no interpretado, los términos no tienen un significado específico. Por ello, las oraciones que podemos formar no son ni verdaderas ni falsas. Sin embargo, aunque no tengamos una interpretación de " p ", de "-" ni de " v ", solemos decir que " $p \vee \neg p$ " es una ley lógica y, por lo tanto, siempre verdadera. ¿Cómo puede ocurrir esto?

16. Alfred Tarski, en *Logic, Semantics, Metamathematics*, Oxford, Clarendon Press, 1956, p. 296, ha indicado el siguiente paralelismo entre dos conjuntos de conceptos metateóricos:

Término primitivo	Axioma
Independencia recíproca de los términos primitivos	Independencia recíproca de los axiomas
Completitud de un conjunto de conceptos	Completitud de un conjunto de axiomas
Definibilidad	Deducibilidad
Definición	Deducción

¿Tiene el concepto de "referencia de un término" un análogo similar? Ayuda: se dice que un conjunto de conceptos es independiente en una teoría dada si y sólo si esos conceptos no son interdefinibles, aunque algunos o todos sean definidos en otras teorías. De la misma manera, un axioma es independiente de los demás, dentro de un mismo sistema deductivo, si y sólo si no es deducible de ellos. También diremos que una teoría es completa si y sólo si para todo par de fórmulas recíprocamente contradictorias, o la una o la otra es derivable en la teoría. Si la

teoría es completa y se le añade una fórmula que no sea derivable dentro del sistema, se producirá una contradicción.

17. Las propiedades de consistencia, independencia de las primitivas e independencia de los axiomas son sintácticas, y lo mismo son las definiciones de los correspondientes conceptos. Pero la identificación de esas propiedades, o sea, sus criterios de contrastación, son semánticos, porque dependen del concepto de modelo (o de satisfacción, o de verdad). ¿Hace esto a la sintaxis dependiente de la semántica?

18. Lenguajes formales interpretados y no interpretados, ¿cuál tiene la primacía?, ¿surge uno a partir del otro?.

19. Comente las siguientes afirmaciones. Trate de argumentar a favor o en contra de ellas según su propia opinión.

a) «En Lógica no hay principios morales. Cualquiera se halla en libertad de elaborar su propia lógica, e.e., su propia forma de lenguaje, como le plazca. Todo lo que se exige de él es que, si desea someterla a discusión, exponga sus métodos con claridad y nos ofrezca reglas sintácticas en lugar de argumentos filosóficos. La actitud tolerante que se sugiere aquí no es otra, por lo que se refiere a los cálculos matemáticos especiales en litigio, que la tácitamente compartida por la mayoría de los matemáticos.» R. Carnap, *The Logical Syntax of Language*, 1937, parágrafo 17.

b) «El matemático no trabaja maquinalmente, como el obrero de la cadena. Nunca se insistirá demasiado en el papel fundamental que representa en sus investigaciones una intuición particular, que no es la intuición sensible vulgar, sino más bien una especie de adivinación directa (anterior a todo razonamiento) del comportamiento normal que parece tener derecho a esperar por parte de entes matemáticos con los que ha tenido una frecuentación tan prolongada que se han convertido en entes casi tan familiares como los del mundo real.» N. Bourbaki, "La arquitectura de las matemáticas"

20. Compare las siguientes posiciones acerca de los números.

a) "Los números, entonces, no son nombres de objetos. Son nombres de un cierto proceso, el proceso de adición... Uno es el nombre de éste cumplido una vez, o de la agregación comenzando; dos, el nombre de él cumplido una vez más." James Mill, *The Analysis of the Human Mind*, vol. II, p. 9.

b) "Los números son, en su propiedad más estricta, nombres de objetos. Dos es seguramente un nombre de las cosas que son dos, dos dedos, etc. El proceso de sumar uno a uno que forma dos, es connotado, no denotado, por el nombre dos." John Stuart Mill, nota del editor del pasaje anterior. Ambos citados por Ogden y Richards, *El significado del significado*, p. 110.

21. Compare las siguientes nociones de inducción: la de Copi, la inducción aristotélica y la inducción matemática.

22. Critique la siguiente posición, según la cual, el uso de la inducción matemática como método de prueba, revela que el conocimiento matemático no puede ser empírico.

Establecer la ciencia del infinito implica el principio de la inducción matemática. Este principio afirma el poder del raciocinio por recurrencia o repetición. Simboliza casi todo el pensamiento matemático, todo lo que hacemos cuando construimos agregados complejos partiendo de elementos simples. Es, como lo destacó Poincaré, «a la vez necesaria al matemático e irreducible a la lógica». Su enunciado del principio es: «si una propiedad es cierta para el número uno y si demostramos que es verdadera para $n + 1$, con tal que lo sea también para n , será verdadera para la totalidad de los números.» La inducción matemática no deriva de la experiencia, sino que más bien constituye una propiedad de la mente, intuitiva, inherente y casi instintiva: «Lo que hemos hecho una vez lo podemos hacer nuevamente.»

23. Examine críticamente, desde un punto de vista empirista, el siguiente argumento:

“Si un juicio es pensado con estricta universalidad, de suerte que no se permita como posible ninguna excepción, entonces no es derivado de la experiencia, sino absolutamente a priori. Los juicios matemáticos son pensados de esta manera. Por lo tanto, los juicios matemáticos son a priori.” [P. ej., ¿Cómo criticaría este razonamiento un empirista matemático?]

24. Desarrolle la siguiente analogía presentada por Morris Kline en *Matemáticas. La pérdida de la certidumbre* (Siglo XXI, Madrid, 1985, p. 238), relacionándola con el problema de la consistencia de las geometrías euclidianas y no euclidianas:

"Los defectos que pueden aparecer en una formulación abstracta de la realidad física puede que sean comprendidos mejor con una analogía. Se ha cometido un crimen (y muchos estarían de acuerdo en que las matemáticas son un crimen). El detective que investiga el crimen tiene unos términos no definidos -un criminal, una hora del crimen, etc.. Todos los datos que pueda obtener los anota cuidadosamente. Estos son sus axiomas. A continuación deduce algunos hechos con la esperanza de poder hacer afirmaciones acerca del crimen. Muy probablemente hará deducciones contradictorias porque alguno de sus supuestos, aunque basados en la medida de lo posible en lo que realmente ocurrió, pueden ir más allá de la realidad o ser sólo aproximados. No hay contradicción en la situación física real. Había un crimen y un criminal. Pero la deducción puede llevar a pensar que éste mide a la vez un metro cincuenta y un metro ochenta."

25. Haga explícito lo que quiso decir Bertrand Russell al proponer la siguiente definición de las matemáticas: *La Matemática es una ciencia en la cual no se sabe ni de qué cosas se habla ni si de lo que ellas se afirma es verdadero o falso.*

26. Intente disolver o refutar las siguientes objeciones al uso de números negativos.

- a) La noción de número negativo es absurda, pues la regla de los signos nos obliga a admitir que $-1/1 = 1/-1$. Si se entiende esta igualdad como la igualdad de dos razones, habremos de afirmar que la razón del menor de dos números al mayor de ellos es igual a la razón del mayor al menor. [Paradoja de Arnauld]
- b) Los números negativos son mayores que infinito, pues $a/0 = \infty$, y si dividimos a por un número menor que 0, ¿no deberíamos obtener un cociente negativo y mayor que infinito? [Hipótesis de Wallis-Euler].
- c) Una cantidad única nunca puede considerarse como afirmativa o negativa: pues si una cantidad única como b se marca, ya sea con el signo +, ya con el signo -, sin asignarle otra cantidad, como a , a la cual ha de sumarse o sustraerse, la marca carece de sentido o significado. Por consiguiente, si se dice que el cuadrado de -5 es igual a +25, tal aseveración, o bien tiene que significar sólo que 5 veces 5 son 25, sin tener para nada en cuenta los signos, o bien debe considerarse como un puro disparate, como un galimatías ininteligible. [Francis Masère, *Disertation on the Use of the Negative Sign in Algebra*, 1758]

^[1] Morris Kline (1985), p. 122.

^[2] Idem, p. 96.